論　文

対称リーマン空間上の球形微分形式

兼　田　英　二

Spherical differential forms on symmetric Riemannian spaces

by Eiji KANEDA

In this paper, we define the notion of spherical differential forms with respect to a Riemannian symmetric pair (G, K), and investigate the spectra of the Laplace-Beltrami operator acting on the spherical differential forms. Spherical differential forms are defined to be the differential forms on G having one of the properties of the lifts of differential forms on M=G/K. In this sense we may say that the space of all spherical differential forms contains the space of all differential forms on M. Therefore the spectra of the Laplace-Beltrami operator acting on the spherical differential forms contain the spectra of the Laplace-Beltrami operator acting on the differential forms on M.

§0. 序

最近いくつかのコンパクトな対称リーマン空間 $M=G/K$ について，その上の微分形式に作用するラプラス―ベルトラミ作用素のスペクトルが計算された（〔4〕，〔6〕，〔7〕，〔8〕，〔11〕）．

対称リーマン空間の場合スペクトルを求める問題はM上の微分形式のなすベクトル空間をGの自然な作用でもって既約分解する問題に帰着する．この既約分解を達成するためには次の２つのプログラムを実行する必要がある：

(1)対称対（G，K）に関する分岐律（すなわち，任意のGの既約表現をKの表現と見て既約表現の和に分解する法則）を求める．

(2)Mの原点における接空間の上の外積代数を等方部分群Kの作用で既約分解する．

ところが，実際にこのプログラムを実行することはとてもむつかしい．現実にスペクトルの計算された低階数の対称リーマン空間についても相当に複雑であるし，階数が上がればそれにつれて，尚一層複雑なものになることが予測される．

そこで，考える対象を主として１次の微分形式に限ってみることにしよう．１次の微分形式は最も幾何的な意味合いを持つ対象であって，任意の対称リーマン空間について，そのスペクトル

を知ることは重要なことだと思えるからである．このように問題を限定することにすれば，上記(1), (2)（特に(1)）に代わる，より広範囲の対称リーマン空間について，スペクトルを求めることのできる簡単な方法が発見できるのではないかと思える．

この論文では，対称対（G，K）に関する球形式の概念を定義し，その上に作用するラプラス—ベルトラミ作用素のスペクトルについて考察する．

球形式は，G上の微分形式であって，M＝G/K上の微分形式のGへの持ち上げのもつ性質——Kの作用による不変性——をもつものとして定義される．この意味で球形式のなすベクトル空間はM上の微分形式のなすベクトル空間を含む．したがって球形式の上に作用するラプラス—ベルトラミ作用素のスペクトルは，M上の微分形式の上に作用するラプラス—ベルトラミ作用素のスペクトルを含む．

ところで，球形式に関するスペクトルの計算は原理的には非常に簡単である．計算は，M上の微分形式のスペクトルの場合と同様，球形式のなすベクトル空間をGの作用で既約分解することによってなされるが，よく知られたG上の表現代数のGの作用による分解を使えば，

　Gの表現ρ，ρ'のテンソル積$\rho\otimes\rho'$を既約表現の和に分解せよ．

という問題に帰着させることができる．もとより，ρ，ρ'を任意のものとして考える必要はない．§2において，この問題を我々の必要とする形で解決する．

これで球形式に関するスペクトルは原理的には計算できる訳だが，その計算が如何に実行されるのか，あるいはまた，その結果が，M上の微分形式に関するスペクトルとどの程度の隔たりをもつのか，興味ある問題である．そこで，§3では最も簡単な場合と考えられる複素射影空間の場合に，計算を実行してみる．上述した結果の隔たりについての分析は別の機会に譲りたいと思う．

§1．対称対と球形式

以下，Gをコンパクト半単純な連結C^∞リイ群，$\mathfrak{g}$をそのリイ環とする．ここでは$\mathfrak{g}$をGの左不変ベクトル場のなすリイ環とみなすことにする．

1．1．G上の微分形式

Bを$\mathfrak{g}$のキリング形式とする．－Bから自然に定まるG上の両側不変なリーマン計量を$\widetilde{Q}$で表わそう．

非負な整数pに対し，$\Lambda^p(G)$でG上のp次の複素数値C^∞級微分形式のなすベクトル空間を表わすことにする．通例に従い$\Lambda^0(G)$を$C^\infty(G)$で表わそう．

$\omega\in\Lambda^p(G)$とする．このとき，すべてのX_1，…，$X_p\in\mathfrak{g}$に対して，$\omega(X_1, \cdots, X_p)\in C^\infty(G)$であるから，$\omega$は，$\Lambda^p\mathfrak{g}$から$C^\infty(G)$への線形写像とも思える．以下このような同一視を行なう．

G上の外微分作用素$\widetilde{d}$，$\widetilde{Q}$に関する$\widetilde{d}$の形式的随伴作用素$\widetilde{\delta}$および，ラプラス—ベルトラミ作

用素 $\widetilde{\Delta}(=\tilde{d}\tilde{\delta}+\tilde{\delta}\tilde{d})$ は上記の同一視のもとで次のようになる：

$$\tilde{d}\omega(X_1, \cdots, X_{p+1})=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i X_i\omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{p+1})$$
$$+\sum_{i<j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, \widehat{X}_j, \cdots, X_{p+1}),$$
$$\tilde{\delta}\omega(X_1, \cdots, X_{p-1})=-\sum_{\alpha=1}^{m}E_\alpha\omega(E_\alpha, X_1, \cdots, X_{p-1}),$$
$$\widetilde{\Delta}\omega(X_1, \cdots, X_p)=-\sum_{\alpha=1}^{m}E_\alpha E_\alpha\omega(X_1, \cdots, X_p).$$

ここに，$\omega\in\Lambda^p(G)$，$X_1, \cdots, X_{p+1}\in\mathfrak{g}$，$m=\dim G$，$\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$ は $-B$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底を，$X_i\omega(X_i, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{p+1})$ は C^∞ 関数 $\omega(X_1, \cdots, \widehat{X}_i, \cdots, X_{p+1})$ の X_i による微分を表わすものとする．

1．2．対称空間上の微分形式

KをGの閉部分群とし，対（G，K）は対称であるものとする．すなわち，Gの包合的自己同形 θ があって，θ の不変元のなす集合を G_θ，G_θ の単位元を含む連結成分を G_θ^0 と表わすとき，$G_\theta^0\subset K\subset G_\theta$ がなりたっているものとする．

θ を微分して得られる $\mathfrak{g}$ の包合的自己同形をやはり θ で表わそう．θ の固有値１，－１に応ずる固有空間をそれぞれ $\mathfrak{k}$，$\mathfrak{m}$ と書くことにすれば，$\mathfrak{k}$ は，Kのリイ環と同一視でき，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\quad(\text{直交直和}),$$
$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]\subset\mathfrak{k},\quad[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m},\quad[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]\subset\mathfrak{k}$$

がなりたつ．

Mを対称対（G，K）から得られる対称空間（M＝G/K）とし，π をGからMの上への自然な射影とする．

非負な整数 p に対し，$\Lambda^p(M)$ でM上の p 次の複素数値 C^∞ 級微分形式のなすベクトル空間を表わそう．

$\phi\in\Lambda^p(M)$ とする．π による ϕ の引き戻しを $\tilde{\phi}$ で表わせば，

$$\tilde{\phi}(X_1, \cdots, X_p)(x)=\phi_{\pi(x)}(\pi_x X_1, \cdots, \pi_x X_p)$$
$$x\in G,\ X_1, \cdots, X_p\in\mathfrak{g}$$

がなりたつ．ここに $\pi_x X_i$ は X_i の $\mathfrak{g}$ における値を π_x によって射影したものである．

$\Lambda^p(M)$ の π^* による像を $\Lambda^p(M)^\sim$ で表わせば，$\omega\in\Lambda^p(M)^\sim$ について，次がなりたつ：

$X_1, \cdots, X_p$ を $\mathfrak{g}$ の任意の元とする．このとき

(1) $X_i\,(1 \leqq i \leqq p)$ のうち少くとも一つが $\mathfrak{k}$ に属するならば，

$$\omega(X_1, \cdots, X_p) = 0$$

(2) 任意の $x \in G$, $k \in K$ に対して

$$\omega(X_1, \cdots, X_p)(xk) = \omega(Ad(k)X_1, \cdots, Ad(k)X_p)(x).$$

逆に上の(1), (2)を同時にみたす $\omega \in \Lambda^p(G)$ は $\Lambda^p(M)^\sim$ に属すことは明らかであろう．

対称空間 $M = G/K$ 上に G の作用で不変なリーマン計量 Q を

$$Q_{\pi(g)}(\pi_g X, \pi_g Y) = -B(X, Y)$$
$$g \in G, \ X, \ Y \in \mathfrak{m}$$

をみたすように定める．

さて，M の外微分作用素を d，Q に関する d の形式的随伴作用素を δ，ラプラス—ベルトラミ作用素を $\Delta(= d\delta + \delta d)$ で表わそう．このとき次がなりたつ．

命題 1．任意の $\psi \in \Lambda^p(M)$ に対して

$$\widetilde{\Delta\psi} = \tilde{\Delta}\tilde{\psi}$$

この命題は次の補題からただちに従う．

補題．任意の $\psi \in \Lambda^p(M)$ に対して，

$$\widetilde{d\psi} = \tilde{d}\,\tilde{\psi}, \quad \widetilde{\delta\psi} = \tilde{\delta}\,\tilde{\psi}$$

補題の証明．第1の関係式は $\tilde{\psi}$ が ψ の π による引き戻しであることから明らか．以下第2の関係式を証明する．

リーマン計量 Q に付随する共変微分を ∇ で表わせば，

$$\nabla_{\pi_g X}\ \psi(\pi_g X_1, \cdots, \pi_g X_p) = X(\tilde{\psi}(X_1, \cdots, X_p))(g)$$
$$\psi \in \Lambda^p(M), \ g \in G, \ X, \ X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{m}$$

がなりたつことに注意しておく．

$\psi\in\Lambda^p(M)$ とする．$X_1, \cdots, X_{p-1}\in\mathfrak{g}$ とするとき，その中の少くとも一つが $\mathfrak{k}$ に含まれるならば，

$$\tilde{\delta}\tilde{\psi}(X_1, \cdots, X_{p-1})=0$$

がなりたつ．これは $\tilde{\delta}$ の定義から明らか．したがって，第2の関係式を示すためには，すべての $X_1, \cdots, X_{p-1}$ が $\mathfrak{m}$ に属すとき，

$$\tilde{\delta}\tilde{\psi}(X_1, \cdots, X_{p-1})=\widetilde{\delta\psi}(X_1, \cdots, X_{p-1})$$

となることを示せばよい．$-B$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 $\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ を最初の $E_1, \cdots, E_n$ ($n=\dim M$) が $\mathfrak{m}$ の基底となるようにとる．このとき，任意の $g\in G$ に対して，

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}\tilde{\psi}(X_1, \cdots, X_{p-1})(g)&=-\sum_{\alpha=1}^{m}E_\alpha\tilde{\psi}(E_\alpha, X_1, \cdots, X_{p-1})(g)\\
&=-\sum_{\alpha=1}^{n}E_\alpha\tilde{\psi}(E_\alpha, X_1, \cdots, X_{p-1})(g)\\
&=-\sum_{\alpha=1}^{m}\nabla_{\pi_g E_\alpha}\psi(\pi_g E_\alpha, \pi_g X_1, \cdots, \pi_g X_{p-1})
\end{aligned}$$

ここで，$\{\pi_g E_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ は $T_{\pi(g)}(M)$ の正規直交基底をなすから，δ の定義により

$$\begin{aligned}
&=(\delta\psi)_{\pi(g)}(\pi_g X_1, \cdots, \pi_g X_{p-1})\\
&=\widetilde{\delta\psi}(X_1, \cdots, X_{p-1})(g).
\end{aligned}$$

証明終．

さて，$\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^m$ を $-B$ に関する $\mathfrak{g}$ の正規直交基底とする．$f\in C^\infty(G)$ に対して，

$$Cf=-\sum_{\alpha=1}^{m}E_\alpha E_\alpha f$$

と定める．作用素 $C : C^\infty(G)\ni f\to Cf\in C^\infty(G)$ のことを，Bに付随するGのカシミール作用素という．明らかに

$$\tilde{\Delta}\omega(X_1, \cdots, X_p)=C(\omega(X_1, \cdots, X_p))$$
$$\omega\in\Lambda^p(G),\ X_1, \cdots, X_p\in\mathfrak{g}$$

このことと，命題1から，$\Lambda^p(M)$ に作用するラプラス—ベルトラミ作用素の固有値を知るに

は，粗く言って $C^\infty(G)$ に作用するカシミール作用素の固有値を調べればよいことになる．次節でそのことを詳しく調べてみよう．

1．3．球形式と拡張された球表現

$\Lambda^p(G)$ にノルム $\|\cdot\|_0$ を次のようにして導入する：$\omega\in\Lambda^p(G)$ とするとき

$$\|\omega\|_0=\mathrm{Max}\,|\omega(E_{i_1},\ \cdots,\ E_{i_p})(x)|$$

ここに，右辺の Max は，すべての $x\in G$，すべての $\mathfrak{g}$ の正規直交基底 $\{E_\alpha\}$，すべての添数 i_1，$\cdots$，$i_p(i_1<\cdots<i_p)$ についてのものである．

G の $\Lambda^p(G)$ への作用 L，R を

$$\begin{aligned}
&L_g\,\omega(X_1,\ \cdots X_p)(x)=\omega(X_1,\ \cdots,\ X_p)(g^{-1}x)\\
&R_g\,\omega(X_1,\ \cdots,\ X_p)(x)=\omega(Ad(g^{-1})X_1,\ \cdots,\ Ad(g^{-1})X_p)(xg)\\
&\qquad \omega\in\Lambda^p(G),\ g,\ x\in G,\ X_1,\ \cdots,\ X_p\in\mathfrak{g}
\end{aligned}$$

で定義する．

$\omega\in\Lambda^p(G)$ であって，集合

$$\{L_g\,\omega\,|\,g\in G\}$$

で生成される部分ベクトル空間の次元が有限となるもの全体のなす部分ベクトル空間を $\mathfrak{v}^{(p)}(G)$ で表わすことにする．$p=0$ のとき $\mathfrak{v}^{(0)}(G)$ の代わりに $\mathfrak{v}(G)$ と書くことにする．$\mathfrak{v}(G)$ は G の表現代数と呼ばれ，それに関し，ペーター——ワイルの定理が知られている．それについて述べよう．

G の既約表現の同値類全体のなす集合を $\mathcal{D}(G)$ で表わす．$[\rho]\in\mathcal{D}(G)$ とし，ρ の表現空間を $V(\rho)$ とする．$\mathfrak{v}(G)$ を作用 L を介して G 空間とみなし，$V(\rho)$ と G 同値な部分ベクトル空間の和を $\mathfrak{v}([\rho])(G)$ と書くことにする．このとき

命題 2（ペーター——ワイルの定理）．$\mathfrak{v}(G)$ はノルム $\|\cdot\|_0$ に関して $C^\infty(G)$ の稠密な部分ベクトル空間であって

$$\mathfrak{v}(G)=\sum_{[\rho]}\mathfrak{v}([\rho])(G)\qquad（代数的直和）.$$

ここに $[\rho]$ は $\mathcal{D}(G)$ を動く．

$p \geqq 1$ としよう．$\mathfrak{v}^{(p)}(G)$ は任意の $X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{g}$ に対して，$\omega(X_1, \cdots, X_p) \in \mathfrak{v}(G)$ となる ω から構成されていることが容易に確かめられる．$[\rho] \in \mathcal{D}(G)$ とする．任意の $X_1, \cdots, X_p \in \mathfrak{g}$ に対して，$\omega(X_1, \cdots, X_p) \in \mathfrak{v}([\rho])(G)$ をみたす $\omega \in \mathfrak{v}^{(p)}(G)$ からなる部分ベクトル空間を $\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G)$ で表わすことにしよう．

定義．(G, K) を対称対とする．任意の $k \in K$ に対して，$R_k\omega = \omega$ をみたす $\omega \in \Lambda^p(G)$ を対称対 (G, K) に関する p 次の球形式ということにする．

対称対 (G, K) に関する p 次の球形式のなすベクトル空間を $\Lambda^p(G, K)$ で表わすことにし，

$$\mathfrak{v}^{(p)}(G, K) = \Lambda^p(G, K) \cap \mathfrak{v}^{(p)}(G),$$
$$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G, K) = \Lambda^p(G, K) \cap \mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G)$$

とおく．$\mathfrak{v}^{(p)}(G, K)$, $\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G, K)$ は G の作用 L のもとで不変である．

定義．ρ を G の既約表現とする．$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G, K) \neq 0$ であるとき，ρ を対称対 (G, K) の p 次の球表現という．

対称対 (G, K) の p 次の球表現の同値類のなす集合を $\mathcal{D}^{(p)}(G, K)$ で表わすことにする．$p = 0$ のとき，$\mathcal{D}^{(0)}(G, K)$ は通常の意味の球表現の同値類のなす集合 $\mathcal{D}(G, K)$ に一致する．

命題 3．$\mathfrak{v}^{(p)}(G, K)$ はノルム $\|\cdot\|_0$ に関して，$\Lambda^p(G, K)$ の稠密な部分ベクトル空間であって，

$$\mathfrak{v}^{(p)}(G, K) = \sum_{[\rho]} \mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G, K) \qquad (\text{代数的直和}).$$

ここに，$[\rho]$ は $\mathcal{D}^{(p)}(G, K)$ を動く．

証明．命題 2 からただちに次を得る：

$\mathfrak{v}^{(p)}(G)$ はノルム $\|\cdot\|_0$ に関して $\Lambda^p(G)$ の稠密な部分ベクトル空間であって，

$$(*) \qquad \mathfrak{v}^{(p)}(G) = \sum_{[\rho]} \mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G) \qquad (\text{代数的直和}).$$

ここに，$[\rho]$ は $\mathscr{D}(G)$ を動く．

$\omega\in\Lambda^p(G,\ K)$ としよう．(*)から，任意の $\varepsilon(>0)$ に対し，$\omega'\in\mathfrak{v}^{(p)}(G)$ があって，

$$\|\omega-\omega'\|_0<\varepsilon$$

となる．dk を正規化されたK上のハール測度とする．$\{R_g\omega'\mid g\in G\}$ で生成される部分ベクトル空間の次元は有限となるからK上の積分

$$\int_k R_k\omega'\,dk$$

は存在する．これを ω'' とおけば，$\omega''\in\mathfrak{v}^{(p)}(G,\ K)$ であって，

$$\|\omega-\omega''\|_0\leqq\varepsilon$$

がなりたつ．後半の主張も(*)およびK上の積分を使って容易に証明できるので省略する．証明終．

$\mathfrak{g}^c$ を $\mathfrak{g}$ の複素化とする．随伴表現から自然に引き起こされるGの $\Lambda^p\mathfrak{g}^c$ への作用を $\Lambda^p(Ad)$ で表わす．

$[\rho]\in D(G)$ としよう．表現のテンソル積

$$\rho\otimes\Lambda^p(Ad):G\to GL(V(\rho)\otimes\Lambda^p\mathfrak{g}^c)$$

を既約表現の和に分解したときの既約成分のうち，対 $(G,\ K)$ の球表現となるものの個数を $m([\rho])$ で表わすことにする．$m([\rho])$ は分解の仕方によらず定まる．

$[\rho]\in\mathscr{D}^{(p)}(G,\ K)$ となるための必要十分条件は $m([\rho])\neq 0$ となることだが，もっと詳しく次がなりたつ．

定理1．$[\rho]\in\mathscr{D}^{(p)}(G,\ K)$ とする．このとき

(1) 作用Lのもとで $\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G,\ K)$ をG空間とみなすとき，$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G,\ K)$ は $V(\rho)$ にG同値な $m([\rho])$ 個の直和に分解される．ゆえに $d([\rho])=\dim V(\rho)$ とおくとき，

$$\dim\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G,\ K)=m([\rho])\,d([\rho])$$

(2) ラプラス－ベルトラミ作用素 $\widetilde{\Delta}$ は $\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G,K)$ を不変にしている．その $\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G,K)$

への制限は$C([\rho])\cdot I$（Iは恒等写像）に等しい．ここに$C([\rho])$はBに付随する表現ρのカシミール作用素，i.e.，$-\sum_{\alpha=1}^{m}\rho(E_\alpha)\rho(E_\alpha)$（$\{E_\alpha\}_{\alpha=1}^{m}$は$\mathfrak{g}$の$-B$に関する正規直交規底）の固有値．

証明．表現$\rho\otimes\Lambda^p(Ad)$に関するK不変元のなす部分ベクトル空間の次元は$m([\rho])$であることに注意しておく．これは，コンパクトな対称対の球表現に関するK不変元のなす部分ベクトル空間の次元が1であることから従う．

さて線形写像$\Phi: V(\rho)\otimes V(\rho)^*\to C^\infty(G)$を

$$\Phi(v\otimes\xi)(x)=\xi(\rho(x^{-1})v)$$
$$x\in G,\quad v\in V(\rho),\quad \xi\in V(\rho)^*$$

で定義すれば，Φの像は$\mathfrak{v}([\rho])(G)$に一致し，

$$L_g\Phi(v\otimes\xi)=\Phi(\rho(g)v\otimes\xi),$$
$$R_g\Phi(v\otimes\xi)=\Phi(v\otimes\rho^*(g)\xi)$$

がなりたつ．定義から明らかに

$$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G)=\mathfrak{v}([\rho])(G)\otimes(\Lambda^p\mathfrak{g}^c)^*$$

であるから，$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G)$はGの作用Rのもとで不変であり，その$\mathfrak{v}([\rho])^{(p)}(G)$への制限は，恒等表現$I: G\to GL(V(\rho))$，$\rho^*: G\to GL(V(\rho)^*)$および$\Lambda^p(Ad)^*: G\to GL((\Lambda^p\mathfrak{g}^c)^*)$のテンソル積

$$I\otimes\rho^*\otimes\Lambda^p(Ad)^*: G\to GL(V(\rho)\otimes V(\rho)^*\otimes(\Lambda^p\mathfrak{g}^c)^*)$$

に同値である．Gがコンパクトであるから，表現

$$\rho^*\otimes\Lambda^p(Ad)^*: G\to GL(V(\rho)^*\otimes(\Lambda^p\mathfrak{g}^c)^*)$$

は$\rho\otimes\Lambda^p(Ad)$に半線形同形である．従って$\rho^*\otimes\Lambda^p(Ad)^*$のK不変元のなす部分ベクトル空間の次元は，$\rho\otimes\Lambda^p(Ad)$のそれに等しく，$m([\rho])$となる．これで(1)は証明できた．

(2)はGのBに付随するカシミール作用素Cの$\mathfrak{v}([\rho])(G)$への制限が$C([\rho])\cdot I$となることからただちに従う．　　証明終

$[\rho]\in\mathcal{D}(G)$ に対し，$m([\rho])$ を計算する方法を考察してみよう．

$[\rho']\in\mathcal{D}(G,\ K)$ とする．表現のテンソル積 $\rho\otimes\Lambda^p(\mathrm{A}d)$ を既約表現の和に分解するとき出て来る ρ' と同値な既約成分の個数を $m([\rho];[\rho'])$ で表わすことにする．$m([\rho];[\rho'])$ は既約分解の仕方によらずに定まる．次の関係式は明らかであろう：

$$m([\rho])=\sum_{[\rho']}m([\rho];[\rho']).$$

ここに $[\rho']$ は $\mathcal{D}(G,\ K)$ を動く．

ところで，$m([\rho];[\rho'])$ は表現のテンソル積 $\rho'\otimes\Lambda^p(\mathrm{A}d)$ を既約表現の和に分解するとき出て来る ρ と同値な既約成分の個数に一致する．この事実は $\Lambda^p(\mathrm{A}d)$ と $\Lambda^p(\mathrm{A}d)^*$ とが同値であること，およびGの既約表現の指標の直交関係から従う．ゆえに，$m([\rho])$ は，すべての $[\rho']\in\mathcal{D}(G,K)$ について，$\rho'\otimes\Lambda^p(\mathrm{A}d)$ を既約表現の和に分解し，そのとき出て来る既約成分の中で ρ と同値なものの個数を計算することによって得られる．この操作により $\mathcal{D}^{(p)}(G,\ K)$ は完全に決定される．§３でこの方法に従って計算を実行する．

§２．コンパクト·リイ群の表現

前§で説明したように，拡張された球表現を求めるには，表現のテンソル積を既約表現の和に分解する必要がある．そ方法を，この§で考察しよう．前§同様，Gはコンパクト半単純な連結 C^∞ リイ群とする．

２．１．表現のテンソル積

tをGのリイ環 $\mathfrak{g}$ の極大可換部分リイ環とする．tにおける内積を

$$(H,\ H')=-B(H,\ H')\qquad H,\ H'\in t$$

で定める．

$\rho:G\to GL(V)$ をGの表現とする．$\lambda\in t$ とするとき，すべての $H\in t$ に対して

$$\rho(H)v=\sqrt{-1}(\lambda,\ H)v$$

をみたす $v\in V$ のなす部分ベクトル空間を $V(\lambda)$ で表わす．$V(\lambda)\neq0$ となるとき，λ を表現 ρ の（tに関する）ウェイト，$\dim V(\lambda)$ をウェイト λ の重複度と呼ぶ．

特別な場合として，ρ がGの随伴表現のとき，ウェイトのことをルートと呼ぶことにする．0でないルートのなす集合を $\Delta(G)$ で表わそう．

t に線形順序を1つ固定する．この順序から定まるルートの基本系を

$$\Pi(G)=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\} \qquad l=\dim t^c$$

としよう．

すべての $\alpha\in\Delta(G)$ に対して $(\alpha,\ H)\neq 0$ をみたす $H\in t$ を（tの）正則元と呼ぶ．tの正則元全体のなす集合の連結成分をワイル領域と呼ぶ．すべての $\alpha_i\in\Pi(G)$ に対して $(\alpha_i,\ H)>0$ をみたす $H\in t$ のなす集合を C^+ とすれば，C^+ はワイル領域となる．

W(G) をGのtに関するワイル群とする．$s\in W(G)$ とするとき，s はtの直交変換であるから，この意味で $\det s$ のことを $(-1)^s$ で表わすことにする．

$\lambda\in t$ とする．t上の C^∞ 関数 $e(\lambda)$ を

$$e(\lambda)(H)=\exp\sqrt{-1}\,(\lambda,\ H) \qquad H\in t$$

で定める．明らかに

$$e(\lambda+\lambda')=e(\lambda)\,e(\lambda') \qquad \lambda,\ \lambda'\in t\ .$$

$\lambda\in t$ とするとき

$$\xi(\lambda)=\sum_s(-1)^s e(s\lambda) \qquad (s\text{はW(G)を動く})$$

と定めると任意の $s\in W(G)$ に対し

$$\xi(s\lambda)=(-1)^s\xi(\lambda)$$

がなりたつ．$\xi(\lambda)$ のことを，λ に付属する主交代指標と呼ぶ．

$\lambda\in t$ について，$\xi(\lambda)\neq 0$ であるための必要十分条件は λ がtの正則元であることが容易に確かめられる．

さて，tから生成されるGの輪環部分群をTとしよう．アーベル群の準同形

$$\exp: t\to T$$

の核を $\Gamma(G)$ で表わそう．

すべての$H\in\Gamma(G)$に対して，

$$(\lambda,\ H)\in 2\pi\mathbf{Z}$$

となる$\lambda\in\mathfrak{t}$のなす部分群を$Z(G)$で表わすことにしよう．$\lambda\in Z(G)$とするとき，$e(\lambda)$はT上のC^∞関数を定める．集合$\{e(\lambda)\mid\lambda\in Z(G)\}$で$\mathbf{Z}$上生成される$C^\infty(T)$の部分代数を$\mathcal{R}(T)$と書くことにしよう．

Gの任意の表現のウェイトはすべて$Z(G)$に属することが容易にわかる．

$\alpha\in\Delta(G)$とする．αの反転$\alpha^\vee\in\mathfrak{t}$を

$$\alpha^\vee=\frac{2}{(\alpha,\ \alpha)}\alpha$$

で定めるとき，$\alpha^\vee\in\Gamma(G)$であって，集合$\{\alpha^\vee\mid\alpha\in\Delta(G)\}$で生成される$\mathfrak{t}$の部分群はまた集合$\{\alpha_i^\vee\mid\alpha_i\in\Pi(G)\}$でも生成されることが知られている．

$\mathfrak{t}$の基底$\{\Lambda_i\}_{i=1}^l$を

$$(\Lambda_i,\ \alpha_j^\vee)=2\pi\delta_{ij}$$

となるように定めよう．上の注意から，$Z(G)$は$\Lambda_1,\ \cdots,\ \Lambda_l$の$\mathbf{Z}$係数の一次結合の形に書くことができる．この$\{\Lambda_i\}_{i=1}^l$のことを，Gの（$\mathfrak{t}$に関する）基本ウェイトと呼ぶことにしよう．

さて，すべての正のルートの和の$\dfrac{1}{2}$倍をδとかくことにする．δについて

$$(\delta,\ \alpha_i^\vee)=2\pi \qquad 1\leqq i\leqq l$$

となることが知られている．従って，δはC^+に属す$\mathfrak{t}$の正則元であることがわかる．ゆえに$\xi(\delta)\neq 0$である．さらに

命題4．$\lambda\in Z(G)$とするとき，

$$\xi(\lambda+\delta)/\xi(\delta)\in\mathcal{R}(T).$$

$\lambda\in Z(G)$とするとき商$\xi(\lambda+\delta)/\xi(\delta)$のことを$\lambda$に付属する主対称指標と呼び，$\eta(\lambda)$で表わすことにしよう．

$\lambda\in Z(G)$について，$\eta(\lambda)\neq 0$となるための必要十分条件は$\lambda+\delta$が$\mathfrak{t}$の正則元であることで

ある．

さて，すべての $\alpha_i \in \Pi(G)$ に対して

$$(\lambda,\ \alpha_i) \geqq 0$$

をみたす $\lambda \in Z(G)$ のなす集合を $D(G)$ で表わすことにする．Gの既約表現の同値類のなす集合 $\mathscr{D}(G)$ と $D(G)$ との間には次の関係がある：

命題5（カルタン－ワイルの定理）．

(1) $[\rho] \in \mathscr{D}(G)$ とする．表現 ρ の最高のウェイトを $\Lambda([\rho])$ で表わせば $\Lambda([\rho]) \in D(G)$ となり，対応

$$\mathscr{D}(G) \ni [\rho] \rightarrow \Lambda([\rho]) \in D(G)$$

は，上への1対1対応である．

(2) $[\rho] \in \mathscr{D}(G)$ とする．$[\rho]$ の指標を $\chi([\rho])$ で表わせば，$\chi([\rho])$ はT上で $\eta(\Lambda([\rho]))$ に一致する．

$s \in W(G)$ とする．t の変換 $t(s)$ を

$$t(s)\lambda = s(\lambda+\delta)-\delta \qquad \lambda \in \mathrm{t}$$

で定めよう．明らかに

$$t(ss') = t(s) \cdot t(s') \qquad s,\ s' \in W(G)$$

がなりたつ．各 $s \in W(G)$ について，$t(s)$ は $Z(G)$ を不変にすることが確かめられる．関係式

$$\eta(t(s)\lambda) = (-1)^s \eta(\lambda) \qquad \lambda \in Z(G)$$

がなりたつことは明らかである．

命題6．$\lambda \in Z(G)$ とする．$\lambda+\delta$ が t の正則元であれば，$t(s)\lambda \in D(G)$ となる $s \in W(G)$ がただ一つ存在する．逆に $\mu \in D(G)$，$s \in W(G)$ とするとき，$t(s)\mu+\delta$ は t の正則元である．

証明．$\lambda+\delta$ を正則元とする．ワイル群の性質から $s(\lambda+\delta)\in C^{+}$ をみたす $s\in W(G)$ が存在する．このときすべての $\alpha_i\in\Pi(G)$ に対し

$$\frac{1}{2\pi}(s(\lambda+\delta),\ \alpha_i^{\vee})$$

は正の整数となることを確かめよう．この値が正となるのは明らかだから，整数となることを示せばよい．s は t の直交変換だから

$$(s(\lambda+\delta),\ \alpha_i^{\vee})=(\lambda+\delta,\ s^{-1}\alpha_i^{\vee})=(\lambda+\delta,\ (s^{-1}\alpha_i)^{\vee})$$

となるが，$s^{-1}\alpha_i\in\Delta(G)$ であるから $(s^{-1}\alpha_i)^{\vee}$ は $\alpha_j^{\vee}(1\leqq j\leqq l)$ の $\mathbf{Z}$ 係数の一次結合の形にかける．従って，$\dfrac{1}{2\pi}(s(\lambda+\delta),\ \alpha_i^{\vee})\in\mathbf{Z}$ となる．

この事実からたちどころに，

$$\frac{1}{2\pi}(s(\lambda+\delta)-\delta,\ \alpha_i^{\vee})\geqq 0$$

を得る．ゆえに $(t(s)\lambda,\ \alpha_i)\geqq 0$ を得るが，$t(s)\lambda\in Z(G)$ であったから $t(s)\lambda\in D(G)$．

s の唯一性および逆は明らかであろう．　　　　証明終．

この節の主たる目的である次の定理を証明しよう．

定理 2 （〔5〕参照）．ρ，ρ' をGの表現で，特に ρ' は最高ウェイトが Λ' の既約表現とする．ρ のウェイトの集合を Ω，ウェイト $\lambda\in\Omega$ の重複度を $l(\lambda)$ としよう．各 $\Lambda\in D(G)$ について $n(\Lambda)\in\mathbf{Z}$ を

$$n(\Lambda)=\sum_{s}(-1)^{s}\,l(t(s)\Lambda-\Lambda')$$

で定める（ただし $t(s)\Lambda-\Lambda'\notin\Omega$ のときは，$l(t(s)\Lambda-\Lambda')=0$ とするものとする）．このとき，表現のテンソル積 $\rho\otimes\rho'$ を既約表現の和に分解すれば，その既約成分の中には Λ を最高ウェイトとするものが $n(\Lambda)$ 個含まれる．

まず次の補題を証明する．

補題．指標 $\chi([\rho\otimes\rho'])$ のTへの制限を同じく $\chi([\rho\otimes\rho'])$ で表わせば，

$$\chi([\rho\otimes\rho'])=\sum_{\lambda} l(\lambda)\,\eta(\Lambda'+\lambda).$$

ここにλはΩを動く.

証明. $\chi([\rho])$, $\chi([\rho'])$ のTへの制限も同じく $\chi([\rho])$, $\chi([\rho'])$ で表わすことにする. このとき,

$$\chi([\rho])=\sum_{\lambda} l(\lambda)\,e(\lambda) \qquad (\lambda\text{は}\Omega\text{上を動く}),$$
$$\chi([\rho'])=\eta(\Lambda')=\xi(\Lambda'+\delta)/\xi(\delta).$$

任意の $s\in W(G)$ について, $s\Omega=\Omega$, $l(s\lambda)=l(\lambda)\,(\lambda\in\Omega)$ となること, および $\chi([\rho\otimes\rho'])=\chi([\rho])\,\chi([\rho'])$ となることから

$$\begin{aligned}\xi(\delta)\cdot\chi([\rho\otimes\rho'])&=\xi(\Lambda'+\delta)\cdot\chi([\rho])\\&=\Big[\sum_{s}(-1)^{s}e(s(\Lambda'+\delta))\Big]\Big[\sum_{\lambda} l(\lambda)\,e(\lambda)\Big]\\&=\sum_{s}(-1)^{s}\Big[e(s(\Lambda'+\delta))\Big\{\sum_{\lambda} l(s\lambda)\,e(s\lambda)\Big\}\Big]\\&=\sum_{s}(-1)^{s}\Big[\sum_{\lambda} l(\lambda)\,e(s(\Lambda'+\lambda+\delta))\Big]\\&=\sum_{\lambda} l(\lambda)\Big[\sum_{s}(-1)^{s}e(s(\Lambda'+\lambda+\delta))\Big]\\&=\sum_{\lambda} l(\lambda)\,\xi(\Lambda'+\lambda+\delta).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\chi([\rho\otimes\rho'])=\sum_{\lambda} l(\lambda)\,\eta(\Lambda'+\lambda).$$ 証明終.

定理の証明. ある $\lambda\in\Omega$ について $\eta(\Lambda'+\lambda)\neq 0$ としよう. このとき, $\Lambda'+\lambda$ は t の正則元となる. 従って, 命題6から, ある $\Lambda\in D(G)$ および $s\in W(G)$ があって, $\Lambda'+\lambda=t(s)\Lambda$ とかける. このとき, $\eta(\Lambda'+\lambda)=(-1)^{s}\eta(\Lambda)$ となる. s の唯一性から Λ の唯一性も従うので,

$$\chi\ ([\rho\otimes\rho'])=\sum\ n(\Lambda)\ \eta(\Lambda)$$

を得る. ここにΛはD(G) を動く。

さて, $\Lambda\in D(G)$ を最高ウェイトにもつGの既約表現を$\rho\ (\Lambda)$で表わせば, 上の関係式はT上で

$$\chi([\rho\otimes\rho'])=\sum_{\Lambda} n(\Lambda)\,\chi([\rho(\Lambda)])$$

がなりたつことを意味する．指標の性質からこの関係式はG上いたるところで成立する．これは，$\rho\otimes\rho'$ を既約表現の和に分解したとき最高ウェイトが Λ に等しい既約成分の個数が $n(\Lambda)$ であることを意味する．

証明終．

注意：カルタン－ワイルの定理により，Gの既約表現はその最高ウェイトで特徴づけることができた．その結果として，既約表現に関するいろいろな量も最高ウェイトを使って表わすことができる．

$[\rho]\in\mathcal{D}(G)$ としよう．このとき，$d([\rho])$ $(=\dim V(\rho))$ および ρ のカシミール作用素の固有値 $C([\rho])$ は次の公式で与えられる：

$$d([\rho])=\prod_{\alpha}\frac{(\Lambda([\rho])+\delta,\ \alpha)}{(\delta,\ \alpha)}\qquad (\alpha\text{は正のルートを動く})$$

$$C([\rho])=(\Lambda([\rho])+2\delta,\ \Lambda([\rho])).$$

2．2．対称対の球表現

対（G，K）は対称であるとする．対（G，K）の球表現の最高ウェイトからなるD(G)の部分集合をD(G，K)とし，D(G，K)を基本ウェイトで書き表わす方法について述べる．D(G,K)はG/Kが単連結である場合，対（G，K）に付属する佐武ダイアグラムからただちに決定される．佐武ダイアグラムを得るには極大可換部分リイ環 t の取り方を特別なものにする必要がある．

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{m}\qquad(\text{直交直和})$$

を θ による $\mathfrak{g}$ の分解とする．$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{m}$ の極大な可換部分ベクトル空間とし，t として，この $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大な可換部分リイ環を取る．

$\mathfrak{b}=\mathrm{t}\cap\mathfrak{k}$ とおけば

$$\mathrm{t}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\qquad(\text{直交直和})$$

を得る．従って，$\theta(\mathrm{t})=\mathrm{t}$ となる．

t における線形順序を

$$\lambda>0,\ \lambda\notin\mathfrak{b}\ \Rightarrow\ \theta\lambda<0$$

をみたすように定める．これが可能であることは容易に確かめることができる．このような線形順序を θ 順序と言うことにする．

$$\Pi(\mathrm{G})=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_l\}$$

をこの順序に関するルートの基本系とし，$\{\Lambda_i\}_{i=1}^{l}$ を $\Pi(\mathrm{G})$ から定まる基本ウェイトの集合とする．

$\alpha_i\in\mathfrak{h}$ となる $\alpha_i\in\Pi(\mathrm{G})$ からなる部分集合を $\Pi_0(\mathrm{G})$，$\Pi'(\mathrm{G})=\Pi(\mathrm{G})-\Pi_0(\mathrm{G})$ とおく．このとき次のことが知られている：

命題 7． $\alpha_i\in\Pi'(\mathrm{G})$ とするとき次をみたす $\alpha_j\in\Pi'(\mathrm{G})$ がただ一つ存在する：

$$(\#)\qquad \theta\alpha_i+\alpha_j=\Pi_0(\mathrm{G})\ \text{に属する単純ルートの一次結合}$$

$\alpha_i\in\Pi'(\mathrm{G})$ に対し，(#) をみたす α_j を $p(\alpha_i)$ とかくことにすれば，p は $\Pi'(\mathrm{G})$ の位数2の置換を定める．この置換 p を佐武の対合と呼ぶ．

佐武ダイアグラムは $\mathfrak{g}^c$ のディンキンーダイアグラムに次の操作を施すことによって得られる：

(a) $\Pi_0(\mathrm{G})$ に属する単純ルートを黒くぬりつぶす．

(b) $\alpha_i\in\Pi'(\mathrm{G})$，$p(\alpha_i)\neq\alpha_i$ となるとき，α_i と $p(\alpha_i)$ を矢印で結ぶ．

佐武ダイアグラムから D(G，K) を求める方法を述べる．

説明の都合上

$$\Pi'(\mathrm{G})=\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m\},\ \Pi_0(\mathrm{G})=\{\alpha_{m+1},\ \cdots,\ \alpha_l\}$$

であって，佐武対合が

$$\begin{cases} p(\alpha_i)=\alpha_i & 1\leqq i\leqq s \\ p(\alpha_{s+j})=\alpha_{t+j} & 1\leqq j\leqq t-s\quad \left(t=\dfrac{1}{2}(m-s)\right) \end{cases}$$

で与えられているものとする．このとき $\mathrm{M}_1,\ \cdots,\ \mathrm{M}_t\in\mathfrak{t}$ を次の規則で定める：

(1) $1\leqq i\leqq s$ のとき

$\mathrm{M}_i=\Lambda_i$：α_i と隣りあう単純ルートの中に黒くぬられたものがある場合

$\mathrm{M}_i=2\Lambda_i$：上記以外の場合

(2) $s+1\leqq i\leqq t$ のとき

$\mathrm{M}_{s+j}=\Lambda_{s+j}+\Lambda_{t+j}\qquad 1\leqq j\leqq t-s$

命題8．対（G，K）を商空間 G/K が単連結な対称対とする．このとき

$$D(G,\ K)=\{\sum_{i=1}^{l} k_i M_i\ ;\ k_i \in \mathbf{Z},\ k_i \geqq 0\}$$

がなりたつ．

§3．複素射影空間$P^n(C)$上の1次の球形式

我々は§1で対称対（G，K）に関する球形式を定義した．定義から明らかなように球形式の中には対称空間 G/K 上の微分形式が含まれるが，それ以外のものも含む．ここでは G/K を複素射影空間としたときの $\mathcal{D}^{(1)}(G,\ K)$ を決定する．

3．1．複素射影空間$P^n(C)$

よく知られているように，n 次元複素射影空間 $P^n(\mathbf{C})$ は

$$G=SU(n+1),\ K=S(U(1)\times U(n))$$

とおくとき，商空間 G/K で表わされる．ここで，対 (G，K) は対称対である．実際

$$a=\begin{pmatrix} 1 & \\ & -I_n \end{pmatrix} \qquad I_n：n\text{次の単位行列}$$

とおき

$$\theta(x)=axa^{-1} \qquad x\in SU(n+1)$$

と定めれば，θ は G の包合的自己同形であり，その不変元全体のなす集合 G_θ は K に一致する．従って，$P^n(\mathbf{C})$ は対称空間となる．

以下，次節の議論に必要ないろいろの量を与えよう．

G，K のリイ環 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{k}$，$\mathfrak{k}$ の標準補空間 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{g}$ のキリング形式 B は以下の通り．

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(n+1),$$
$$\mathfrak{k}=\left\{\begin{pmatrix} \sqrt{-1}x & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x\in \mathbf{R},\ X\in\mathfrak{u}(n) \\ \sqrt{-1}x+T_rX=0 \end{array}\right\},$$
$$\mathfrak{m}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & -\xi \\ {}^t\bar{\xi} & 0 \end{pmatrix} \middle| \xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)\in \mathbf{C}^n\right\},$$
$$B(X,\ Y)=2(n+1)T_r(XY) \qquad X,\ Y\in\mathfrak{su}(n+1).$$

任意の実数 a, b_1, …, b_n に対して

$$H(a, b_1, \cdots, b_n) = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} b_1 & a & & & \\ a & b_1 & & 0 & \\ & & b_2 & & \\ & 0 & & \cdots & \\ & & & & b_n \end{pmatrix}$$

とおこう．

$$\mathfrak{a} = \{H(a, 0, \cdots, 0) \mid a \in \mathbf{R}\},$$
$$\mathfrak{b} = \{H(0, b_1, \cdots, b_n) \mid b_1, \cdots, b_n \in \mathbf{R}, 2b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0\},$$
$$\mathfrak{t} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$$

とおけば，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}$ の極大可換部分ベクトル空間，$\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分リイ環となる．

$\mathfrak{t}$ のベクトル ν_1, …, ν_{n+1} を

$$(\nu_1, \quad H(a, b_1, \cdots, b_n)) = a + b_1$$
$$(\nu_{n+1}, H(a, b_1, \cdots, b_n)) = -a + b_1$$
$$(\nu_i, \quad H(a, b_1, \cdots, b_n)) = b_i \qquad (2 \leqq i \leqq n)$$

がすべての $H(a, b_1, \cdots, b_n) \in \mathfrak{t}$ についてなりたつように定める．ν_1, …, ν_{n+1} については容易に次のことが確かめられる：

$$\begin{cases} \nu_1 + \cdots + \nu_{n+1} = 0 \\ \theta\nu_1 = \nu_{n+1}, \quad \theta\nu_{n+1} = \nu_1, \quad \theta\nu_i = \nu_i \quad (2 \leqq i \leqq n) \\ (\nu_i, \nu_i) = n/2(n+1)^2 \qquad (1 \leqq i \leqq n+1) \\ (\nu_i, \nu_j) = -1/2(n+1)^2 \qquad (1 \leqq i \neq j \leqq n+1) \end{cases}$$

$\mathfrak{t}$ の基底 $\{\nu_1, \cdots, \nu_n\}$ により $\mathfrak{t}$ の線形順序を

$$\nu_1 > \nu_2 > \cdots > \nu_n > 0$$

となるようにいれる．これが θ 順序であることはよい．

$\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{t}$ に関する 0 でないルートの集合は

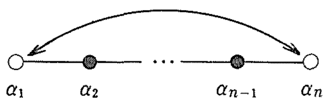
$$\Delta(\mathrm{G})=\{\pm(\nu_i-\nu_j)\mid 1\leqq i<j\leqq n+1\}$$

となる．上の順序に関するルートの基本系および基本ウェイトは

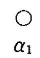
$$\Pi(\mathrm{G})=\{\alpha_1=\nu_1-\nu_2,\ \ \alpha_2=\nu_2-\nu_3,\ \ \cdots,\ \ \alpha_n=\nu_n-\nu_{n+1}\}$$

$$\Lambda_i=\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_i \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

で与えられる．従って佐武ダイアグラムは，



$(n\geqq 2)$



$(n=1)$

となる．$\mathrm{P}^n(\mathbf{C})$ が単連結であることから $\mathrm{D}(\mathrm{G},\mathrm{K})$ は次で与えられる．

$$\mathrm{D}(\mathrm{G},\mathrm{K})=\{k(\Lambda_1+\Lambda_n)\mid k\in\mathbf{Z},\ \ k\geqq 0\} \qquad (n\geqq 2)$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{G},\mathrm{K})=\{2k\Lambda_1\mid k\in\mathbf{Z},\ \ k\geqq 0\} \qquad (n=1)$$

最後に，ワイル群およびそれに付随する変換の生成元の作用を基本ウェイトを使って，書き表わそう．

単純ルート α_i に関する鏡映を s_i と書くと，

$$s_i(\Lambda_i)=\Lambda_{i-1}-\Lambda_i+\Lambda_{i+1} \qquad (1\leqq i\leqq n)$$

$$s_i(\Lambda_j)=\Lambda_j \qquad (i\neq j)$$

ただし，ここで，$\Lambda_0=\Lambda_{n+1}=0$ であるものとする．

従って，$t_i=t(s_i)$ とおけば $\delta=\Lambda_1+\cdots+\Lambda_n$ であることから，$\Lambda=\sum_k l_k\Lambda_k$ とするとき，

$$t_i(\Lambda)=\Lambda+(l_i+1)(\Lambda_{i-1}-2\Lambda_i+\Lambda_{i+1})$$

を得る．この形は後で有効である．

3.2. $\mathscr{D}^{(1)}(G, K)$ の決定

複素射影空間 $P^n(C)$ を定める対称対 (G, K) に関する $\mathscr{D}^{(1)}(G, K)$ を決定することにしよう．そのためには，$\mathscr{D}^{(1)}(G, K)$ に属する類の t に関する最高ウェイトのなす集合 $D^{(1)}(G, K)$ を決定すればよい．

以下，説明を簡単にするため $n \geqq 3$ と仮定して話を進める（$n=1$ または 2 の場合は結果のみを示すことにする）．

k を非負な整数，ρ_k を $k(\Lambda_1+\Lambda_n)$ を最高ウェイトにもつ球表現とする．§1 の議論から $\mathscr{D}^{(1)}(G, K)$ 従って $D^{(1)}(G, K)$ の決定のためには，表現のテンソル積 $\rho_k \otimes Ad$ を既約表現の和に分解すればよい．随伴表現 Ad のウェイトの集合 Ω は

$$\Omega = \{0\} \cup \Delta(G)$$

であり，重複度は 0 ウェイトが n，他のウェイトは 1 であることがわかっているから，§2 で得られた結果を $\rho = Ad$, $\rho' = \rho_k$ として適用することにする．

まず第一に，$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda+\delta$ が t の正則元となる $\lambda \in \Omega$ を求める必要がある．その前に，次のことに注意しておく．すなわち $\Lambda = \sum_i l_i \Lambda_i$ において，ある l_i が -1 に等しくなれば $\Lambda+\delta$ は正則元ではありえない．というのは，前節最後の結果から $t_i(\Lambda)=\Lambda$ となるから．

従って，ひとまず，$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda$ を Λ_i 達の一次結合に書いたとき，どの Λ_i の係数も -1 に等しくならないような $\lambda \in \Omega$ を求めてみることにしよう．

0 以外のウェイト（ルート）は，

$$\pm(-\Lambda_{i-1}+\Lambda_i+\Lambda_{j-1}-\Lambda_j) \qquad (i<j)$$

と書けることから，次を得る：

	λ	$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda$	
(1)	0	$k(\Lambda_1+\Lambda_n)$	
(2)	$\nu_1-\nu_{n+1}$	$(k+1)(\Lambda_1+\Lambda_n)$	
(3)	$\nu_1-\nu_n$	$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+2\Lambda_1+\Lambda_{n-1}$	$(k \geqq 1)$
(4)	$\nu_2-\nu_{n+1}$	$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+2\Lambda_n$	$(k \geqq 1)$
(5)	$\nu_2-\nu_n$	$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+\Lambda_{n-1}$	$(k \geqq 1)$
(6)	$\nu_{n+1}-\nu_1$	$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)$	$(k \geqq 1)$
(7)	$\nu_2-\nu_1$	$(k-2)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+2\Lambda_n$	$(k=0$ or $k \geqq 2)$
(8)	$\nu_{n+1}-\nu_n$	$(k-2)(\Lambda_1+\Lambda_n)+2\Lambda_1+\Lambda_{n-1}$	$(k=0$ or $k \geqq 2)$

(9)　$\nu_{i+1}-\nu_i$　　$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_{i-1}-2\Lambda_i+\Lambda_{i+1}$　　$(2\leqq i\leqq n-1)$

(1)〜(6), (7) $k\geqq 2$, (8) $k\geqq 2$ の各場合には $k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda$ は $D(G)$ に属する．従ってこのとき，$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda+\delta$ は t の正則元である．

次に，残りの場合に吟味すると

(7)　$k=0$　$-2\Lambda_1+\Lambda_2 \xrightarrow{t_1} 0$

(8)　$k=0$　$\Lambda_{n-1}-2\Lambda_n \xrightarrow{t_n} 0$

(9)　$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_{i-1}-2\Lambda_i+\Lambda_{i+1} \xrightarrow{t_i} k(\Lambda_1+\Lambda_n)$

となるから，これらの各場合についても，$k(\Lambda_1+\Lambda_n)+\lambda+\delta$ は正則元となることがわかった．

よって，§2の結論を適用すれば，$\rho_k\otimes Ad$ を既約表現の和に分解するとき，既約成分の最高ウェイトは次のようになる．

$k(\Lambda_1+\Lambda_n)$	$(k\geqq 1)$
$(k+1)(\Lambda_1+\Lambda_n)$	
$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)$	$(k\geqq 1)$
$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+2\Lambda_1+\Lambda_{n-1}$	$(k\geqq 1)$
$(k-2)(\Lambda_1+\Lambda_n)+2\Lambda_1+\Lambda_{n-1}$	$(k\geqq 2)$
$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+2\Lambda_n$	$(k\geqq 1)$
$(k-2)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+2\Lambda_n$	$(k\geqq 2)$
$(k-1)(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+\Lambda_{n-1}$	$(k\geqq 1)$

ただし，最高ウェイトが $k(\Lambda_1+\Lambda_n)$ となる既約成分は2個，他はすべて1個．k について条件つきの場合，それがみたされないときには，0個，すなわちそのような成分は表われない．

上の結果をまとめて次を得る：

定理3．$G=SU(n+1)$，$K=S(U(1)\times U(n))$，$n\geqq 3$ とする．このとき，$D^{(1)}(G, K)$ に属する Λ およびそれに付随する量 $m([\rho(\Lambda)])$，$d([\rho(\Lambda)])$，$C([\rho(\Lambda)])$ は次の表で与えられる．ただし，mはすべての非負な整数値をとるものとする．

	Λ	$m([\rho(\Lambda)])$	$d([\rho(\Lambda)])$	$C([\rho(\Lambda)])$
I	0	1	1	0
II	$(m+1)(\Lambda_1+\Lambda_n)$	4(2)	$\frac{2m+n+2}{n}\binom{m+n}{m+1}^2$	$\frac{(m+1)(m+n+1)}{n+1}$
III	$m(\Lambda_1+\Lambda_n)+2\Lambda_1+\Lambda_{n-1}$	2(1)	$\frac{(m+1)(m+n+2)(2m+n+3)}{n(n-1)}\binom{m+n}{m+2}^2$	$\frac{(m+2)(m+n+1)}{n+1}$
IV	$m(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+2\Lambda_n$	2(1)	$\frac{(m+1)(m+n+2)(2m+n+3)}{n(n-1)}\binom{m+n}{m+2}^2$	$\frac{(m+2)(m+n+1)}{n+1}$
V	$m(\Lambda_1+\Lambda_n)+\Lambda_2+\Lambda_{n-1}$	1	$\frac{(m+1)^2(m+n+1)^2(2m+n+2)}{(n-1)^2(n-2)}\binom{m+n-1}{m+2}^2$	$\frac{(m+2)(m+n)}{n+1}$

注意1．上記表 $m([\rho(\Lambda)])$ の項における（　）内の数字は $\Lambda^1(P^n(C))$ をGの自然な作用で既約分解したときに出て来る，該当する最高ウェイトをもつ成分の個数．なにもない場合は0．(これらの数値は池田－谷口〔6〕の結果から採った.)

注意2．$n=1$ または2の場合の結果は次の通り．

(A)　$n=1$ の場合

	Λ	$m([\rho(\Lambda)])$	$d([\rho(\Lambda)])$	$C([\rho(\Lambda)])$
I	0	1	1	0
II	$2(m+1)\Lambda_1$	3(2)	$2m+3$	$\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

ここに，mはすべての非負な整数値をとる．（　）内の数値の意味は注意1の通り．

(B)　$n=2$ の場合

$n\geqq 3$ の場合の表の(I)～(IV)において$n=2$とおけばよい．ただし(V)に相当する場合はない．（　）内の数値についても，$n\geqq 3$ の場合と同じ．

References

コンパクト・リイ群の表現論および記号等については〔10〕を参考にした．証明を与えていない命題は〔10〕を参照されたい．

〔1〕 C. Chevalley: Theory of Lie groups, Princeton, (1946).

〔2〕 J. V. Dzjadyk : On the determination of the spectrum of an induced representation on a compact symmetric space, Soviet Math. Dokl. 16 (1975), 193−197.

〔3〕 ―――――― : Representations realizable in vector fields on compact symmetric spaces, ibid., 229−232.

〔4〕 S. Gallot et D. Meyer : Opérateur de courbure et Laplacien des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. Pure Appl. 54 (1975), 259−284.

〔5〕 J. E. Humphreys : Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag (1972).

〔6〕 A. Ikeda and Y. Taniguchi : Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbf{C})$, Osaka J. Math. 15 (1978), 515−546.

〔7〕 A. Levy-Bruhl-Laperrière : Spectre de de Rham-Hodge sur les formes de degré 1 des sphères de $R^n(n\geqq 6)$, Bull. Sc. Math., 2^e série 99 (1975), 213−240.

〔8〕 ―――――――― : Spectre de de Rham-Hodge sur l'espace projectif complexe, C. R. Acad. Sc. Paris 284 (23 mai 1977) Série A, 1265−1267.

〔9〕 松島与三 : リー環論, 共立出版, (1956).

〔10〕 竹内　勝 : 現代の球関数, 岩波書店, (1975).

〔11〕 C. Tsukamoto : The spectra of the Laplace-Beltrami operators on $SO(n+2)/SO(2)\times SO(n)$ and $S_p(n+1)/S_p(1)\times S_p(n)$, to appear in Osaka J. Math.